

Robotik I im WS 2017/18

Musterlösungen zum 1. Übungsblatt

Prof. Dr.-Ing. Tamim Asfour
Dipl.-Inform. Peter Kaiser
M. Sc. Fabian Paus
Adenauerring 2, Geb. 50.20
Web: <http://h2t.anthropomatik.kit.edu>

Lösung 1

(Euler- und RPY-Winkel, Quaternionen)

1. $ZX'Z''$ -Eulerwinkel

Darstellung als Verkettung von Rotationen:

$$\begin{aligned}
R &= R_z(\alpha) \cdot R_{x'}(\beta) \cdot R_{z''}(\gamma) \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\gamma) - \sin(\alpha)\cos(\beta)\sin(\gamma) & -\cos(\alpha)\sin(\gamma) - \sin(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma) & \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha)\cos(\beta)\sin(\gamma) + \sin(\alpha)\cos(\gamma) & \cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma) - \sin(\alpha)\sin(\gamma) & -\cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\beta)\sin(\gamma) & \sin(\beta)\cos(\gamma) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich:

$$\begin{aligned}
a_z &= \cos(\beta) \Rightarrow \beta = \arccos(a_z) \\
\frac{n_z}{o_z} &= \frac{\sin(\gamma)}{\cos(\gamma)} = \tan(\gamma) \Rightarrow \gamma = \arctan\left(\frac{n_z}{o_z}\right) \\
\frac{a_x}{a_y} &= -\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -\tan(\alpha) \Rightarrow \alpha = \arctan\left(-\frac{a_x}{a_y}\right)
\end{aligned}$$

Achtung: An dieser Stelle wurde implizit angenommen, dass $a_y \neq 0$ und $o_z \neq 0$. Matrizen für die dies nicht gilt, müssen gesondert betrachtet werden.

2. RPY-Winkel

Darstellung als Verkettung von Rotationen:

$$\begin{aligned}
 R &= R_z(\gamma) \cdot R_y(\beta) \cdot R_x(\alpha) \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\beta)\cos(\gamma) & \sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(\gamma) - \cos(\alpha)\sin(\gamma) & \sin(\alpha)\sin(\gamma) + \cos(\alpha)\sin(\beta)\cos(\gamma) \\ \cos(\beta)\sin(\gamma) & \sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma) + \cos(\alpha)\cos(\gamma) & \cos(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma) - \sin(\alpha)\cos(\gamma) \\ -\sin(\beta) & \sin(\alpha)\cos(\beta) & \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n_z &= -\sin(\beta) \Rightarrow \beta = \arcsin(-n_z) \\
 \frac{o_z}{a_z} &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha) \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{o_z}{a_z}\right) \\
 \frac{n_y}{n_x} &= \frac{\sin(\gamma)}{\cos(\gamma)} = \tan(\gamma) \Rightarrow \gamma = \arctan\left(\frac{n_y}{n_x}\right)
 \end{aligned}$$

Achtung: An dieser Stelle wurde implizit angenommen, dass $a_z \neq 0$ und $n_x \neq 0$. Matrizen für die dies nicht gilt, müssen gesondert betrachtet werden.

3. Bestimmung des Quaternions

Zur Bestimmung des Quaternions $\mathbf{q}$ müssen Rotationsachse und Rotationswinkel berechnet werden.

Rotationsachse: Für die Rotationsachse $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ gilt $R_1 \mathbf{x} = \mathbf{x}$. Die Rotationsachse ist folglich der Eigenvektor von R_1 zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$. Aus $(R_1 - \lambda_1 I) \mathbf{x} = (R_1 - I) \mathbf{x} = 0$ folgt:

$$\begin{aligned}
 -0.64x_1 + 0.48x_2 - 0.8x_3 &= 0 \\
 -0.8x_1 - 0.4x_2 &= 0 \\
 0.48x_1 + 0.64x_2 - 0.4x_3 &= 0
 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich lösen zu $\mathbf{x} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Rotationswinkel (Variante 1): Die Berechnung des Rotationswinkels kann über die allgemeine Formulierung der Rotationsmatrix R um einen Einheitsvektor $\mathbf{v}$ mit dem Winkel α bestimmt werden:

$$R_{\vec{v},\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) + v_1^2(1 - \cos(\alpha)) & v_1v_2(1 - \cos(\alpha)) - v_3\sin(\alpha) & v_1v_3(1 - \cos(\alpha)) + v_2\sin(\alpha) \\ v_2v_1(1 - \cos(\alpha)) + v_3\sin(\alpha) & \cos(\alpha) + v_2^2(1 - \cos(\alpha)) & v_2v_3(1 - \cos(\alpha)) - v_1\sin(\alpha) \\ v_3v_1(1 - \cos(\alpha)) - v_2\sin(\alpha) & v_3v_2(1 - \cos(\alpha)) + v_1\sin(\alpha) & \cos(\alpha) + v_3^2(1 - \cos(\alpha)) \end{pmatrix}$$

Hieraus folgt die Beziehung:

$$\text{Spur}(R) = 3\cos(\alpha) + (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(1 - \cos(\alpha)) = 1 + 2\cos(\alpha)$$

Für die Matrix R_1 aus der Aufgabe gilt:

$$\text{Spur}(R_1) = 0.6 + 0.6 + 0.36 = 1.56 = 1 + 2\cos(\alpha) \Rightarrow \alpha = 73.74^\circ$$

Rotationswinkel (Variante 2): Wir bestimmen einen Vektor $\mathbf{v}$, sodass gilt $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0$, $\mathbf{v}$ ist also orthogonal zur Rotationsachse $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}' = R_1 \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1.28 \\ 0.6 \\ 0.04 \end{pmatrix}$$

Der Rotationswinkel α entspricht dem Winkel zwischen den beiden Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{v}'$:

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{v}'\|} = \frac{0.56}{\sqrt{2}} = 0.28 \Rightarrow \alpha = \arccos(0.28) = 1.287 \text{ rad} = 73.74^\circ$$

Lösung: Das Quaternion $\mathbf{q}$ lässt sich aus Rotationsachse und -winkel aufstellen:

$$\mathbf{q} = \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right), \mathbf{x} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) = (0.8, 0.2, -0.4, -0.4)$$

Lösung 2

(Homogene Matrizen)

1. T beschreibt eine Rotation um 90° um die y -Achse, sowie eine Translation um den Vektor $(5, 0, 0)^T$.
2. Das Ergebnis lautet $\mathbf{v}' = (8, 2, -1)^T$. Rechenweg:

$$T \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Die inverse Transformationsmatrix wird folgendermaßen berechnet:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T \mathbf{v} \\ o_x & o_y & o_z & -o^T \mathbf{v} \\ a_x & a_y & a_z & -a^T \mathbf{v} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 3

(Verkettung von Koordinatentransformationen)

Die lokalen Transformationsmatrizen lauten

$$\begin{aligned}
{}^{init}T_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
{}^1T_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
{}^2T_3 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 2 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Pose P_3 im BKS berechnet sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
P_3 &= T_{init} {}^{init}T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^1T_2 {}^2T_3 \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^2T_3 \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Lösung 4

(Distanz von Posen)

Translationsdifferenz Δt :

$$\begin{aligned}
\Delta t = \|\mathbf{t}_{Goal} - \mathbf{t}_{TCP}\| &= \left\| \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| \\
&= \sqrt{6^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14} = 7.48
\end{aligned}$$

Rotationsdifferenz $\Delta\alpha$:

$$\begin{aligned}
R_{TCP,Goal} &= R_{TCP}^{-1} R_{Goal} = R_{TCP}^T R_{Goal} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aus Aufgabe 1 bekannt:

$$Spur(R) = 1 + 2\cos(\alpha)$$

Für $R_{TCP,Goal}$ gilt daher:

$$Spur(R_{TCP,Goal}) = 0 = 1 + 2\cos(\Delta\alpha) \Rightarrow \Delta\alpha = 120^\circ$$

Lösung 5

(Quaternionen)

$$1. \mathbf{v} = 0 + 5i + 1j + 7k$$

$$2. \mathbf{q} = (\cos\frac{\phi}{2}, \mathbf{a}\sin\frac{\phi}{2}) = \cos\frac{\phi}{2} + k \cdot \sin\frac{\phi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} + k \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{q}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} - k \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3.

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}' = \mathbf{q}\mathbf{v}\mathbf{q}^* &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}k\right) \cdot (5i + 1j + 7k) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}k\right) \\
&= \left(\frac{5}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j + \frac{7}{\sqrt{2}}k + \frac{5}{\sqrt{2}}ki + \frac{1}{\sqrt{2}}kj + \frac{7}{\sqrt{2}}k^2\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}k\right) \\
&= \left(\frac{4}{\sqrt{2}}i + \frac{6}{\sqrt{2}}j + \frac{7}{\sqrt{2}}k - \frac{7}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}k\right) \\
&= 2i - 2ik + 3j - 3jk + \frac{7}{2}k - \frac{7}{2}k^2 - \frac{7}{2} + \frac{7}{2}k \\
&= -i + 5j + 7k
\end{aligned}$$

$$\text{Ergebnis: } \mathbf{p}' = (-1, 5, 7)^T$$

4. Zunächst wird der Winkel zwischen $\mathbf{q}_1$ und $\mathbf{q}_2$ bestimmt:

$$\cos\theta = \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

Die SLERP-Interpolation ergibt sich dann zu:

$$\begin{aligned}\text{Slerp}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, t) &= \frac{\sin((1-t)\frac{\pi}{2})}{\sin\frac{\pi}{2}} \cdot \mathbf{q}_1 + \frac{\sin(t\frac{\pi}{2})}{\sin\frac{\pi}{2}} \cdot \mathbf{q}_2 \\ &= \sin\left((1-t)\frac{\pi}{2}\right) \cdot \mathbf{q}_1 + \sin\left(t\frac{\pi}{2}\right) \cdot \mathbf{q}_2\end{aligned}$$

Für $t = \frac{1}{2}$ ergibt sich:

$$\text{Slerp}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \frac{1}{2}) = \sin\frac{\pi}{4} \cdot \mathbf{q}_1 + \sin\frac{\pi}{4} \cdot \mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathbf{q}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j$$

Lösung 6

(Quaternionen)

Assoziativität und die Existenz des neutralen Elements folgen aus $\mathbb{H}$. Außerdem gilt trivialerweise $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H}$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathbb{S}^3$ abgeschlossen bezüglich der Multiplikation ist und für jedes Element ein inverses Einheitsquaternion existiert.

$$1. \quad \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathbb{S}^3 \Rightarrow \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 \in \mathbb{S}^3$$

$$2. \quad \mathbf{q} \in \mathbb{S}^3 \Rightarrow \mathbf{q}^{-1} \in \mathbb{S}^3$$

Beweis:

$$1. \quad \|\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2\|^2 = (\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2) \cdot (\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2)^* = \mathbf{q}_1 (\mathbf{q}_2 \mathbf{q}_2^*) \mathbf{q}_1^* = \mathbf{q}_1 \|\mathbf{q}_2\|^2 \mathbf{q}_1^* = \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_1^* \cdot \|\mathbf{q}_2\|^2 = \|\mathbf{q}_1\|^2 \cdot \|\mathbf{q}_2\|^2 = 1$$

$$2. \quad \|\mathbf{q}^{-1}\|^2 = \left\| \frac{\mathbf{q}^*}{\|\mathbf{q}\|^2} \right\|^2 = \|\mathbf{q}^*\|^2 = 1$$